

MODELOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES NA COMPREENSÃO DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL E O ESTUDO DO ESPAÇO-TEMPO PRÓXIMOS A CORPOS ESFÉRICOS MASSIVOS.¹

BIOLCATTI, Enzo Colhado²
SPONCHIADO, Rodrigo Carvalho³

RESUMO

As investigações associadas com a Teoria da Relatividade Geral (TRG) são um campo ativo e muito prolífico da física teórica e experimental na atualidade. Porém, o complexo ferramental matemático e conceitual constitui um desafio para investigações no contexto de uma iniciação científica. Está sendo realizado neste trabalho adaptações em modelos matemáticos e físicos apropriados para a compreensão do aparato teórico-conceitual da TRG sem superficializar a teoria e investigar também o célebre problema do campo gravitacional no entorno de objetos compactos esféricos, como estrelas e buracos negros, bem como órbitas de corpos de teste no seu entorno. Sendo necessário apenas o acesso à internet e a biblioteca do campus para realizar a pesquisa bibliográfica necessária ao desenvolvimento do projeto de iniciação científica.

Palavras-chave: Modelo, Relatividade, Gravidade, Geodésica.

INTRODUÇÃO

Não é desconhecido que os conteúdos das componentes curriculares que abrangem os cálculos e conceitos da Teoria Relatividade Geral (TRG) podem se tornar um tanto quanto desafiadores para alunos de primeira viagem da graduação. Desta forma, ao realizar diversas reuniões informais que dialogam sobre o tema, os autores realizaram a formalização da pesquisa com o intuito de promover um processo de aprendizagem a partir de modelos mais simples, que futuramente remeteriam a conceitos de curvatura do espaço-tempo. A partir desta abordagem, foi possível a realização de uma primeira palestra realizada no ano de 2024 na SEFIS (Semana da Física do Instituto Federal de São Paulo) com o título “Uma possível introdução a Relatividade Geral”. Ela teve como objetivo mostrar os caminhos iniciais no qual um aluno graduando poderia começar a investigar os temas que abrangem as discussões da TRG.

Portanto, o seguinte trabalho tem como ponto principal a investigação da TRG a partir de estruturas equivalentes e a descrição a partir dela de situações de movimento de corpos pontuais próximos a objetos massivos.

OBJETIVOS

Como objetivo geral, esta iniciação científica pretende investigar, utilizando métodos de Geometria Diferencial, características físicas e geométricas do espaço-tempo (ET) da Teoria da Relatividade Geral (TRG), situações de movimento de corpos pontuais próximos a objetos massivos. Para cumprir estes itens, tais objetivos específicos foram traçados:

¹Projeto de Iniciação científica (IC).

²Graduando de Licenciatura em Física; Instituto Federal de São Paulo; São Paulo; SP; enzo.biolcatti@aluno.ifsp.edu.br.

³Doutor em Física pela USP; Instituto Federal de São Paulo; São Paulo; SP; rodrigoc@ifsp.edu.br.

(1) Compreender as ferramentas matemáticas necessárias para descrever modelos de espaços geométricos mais simples a partir do formalismo da Mecânica Lagrangiana, estudando o movimento de um ponto material em uma superfície de vínculo lisa, sem atrito, com curvatura, para se obter a descrição do movimento por meio de uma equação de uma geodésica nessa superfície, similar ao movimento de um ponto material no espaço-tempo curvo da TRG;(2) Compreender a partir da equação geodésica, aspectos geométricos importantes no formalismo da TRG (utilização de coordenadas generalizadas, definição de espaços tangentes, tensor métrico, definições de comprimento de curvas, geodésicas, derivada covariante, curvatura);(3) Investigar os aspectos físicos relacionados com os elementos do formalismo matemático da TRG (Equação da Geodésica como descrição do movimento inercial de corpos no ET, relação entre curvatura em distribuição de energia-momento e em movimentos associados com efeitos-de-maré);(4) Investigar, em particular, a geometria do ET no entorno de uma distribuição esférica de massa e aspectos físicos associados (movimento orbital, deflexão da luz, desvio para o vermelho gravitacional, paradoxo dos gêmeos gravitacional).

METODOLOGIA

Este projeto não exigiu recursos especiais além do acesso à bibliografia. A busca de referências será feita pela internet, em bases de dados eletrônicas. O desenvolvimento se deu-se através da leitura dos artigos científicos, livros especializados, e discussão com o orientador, que foi realizado nas salas de aula do Instituto Federal de São Paulo.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Teoria da Relatividade Restrita (TRR), originalmente, ocupou-se com o estudo do movimento dos corpos materiais e dos campos eletromagnéticos em referenciais inerciais munidos de três coordenadas cartesianas e uma coordenada temporal, associada à adoção de um protocolo específico de sincronização de relógios, necessário para compatibilizar o Princípio de Relatividade com o Eletromagnetismo de Maxwell-Lorentz (Einstein, 1905; Galison, 2013). A TRR adotou o Princípio de Relatividade como um de seus pressupostos e a sua compatibilização com a Eletrodinâmica produziu resultados novos em comparação com a física pré-relativista, como a relativização da noção de simultaneidade, a dissincronia de relógios que seguiam percursos distintos, a associação entre massa e conteúdo energético de um corpo, a contração do comprimento, dilatação do tempo, efeito Doppler relativístico, etc (Einstein, 1914-1917). Em 1908, Hermann Minkowski desenvolveu uma abordagem geométrica para a TRR em que usou um tipo de geometria não-euclidiana em quatro dimensões sem curvatura. O percurso de um ponto material livre da ação de forças era descrito, nessa geometria de quatro dimensões, por linhas retas euclidianas. Minkowski também inaugurou o uso de uma linguagem tensorial para expressar as equações de Maxwell-Lorentz e os campos associados, no entanto, a geometria do espaço-tempo era desprovida de curvatura e não sofria influência alguma com a presença de matéria ou qualquer fenômeno físico (Minkowski, 1908; Silva, 2017).

Na Teoria da Relatividade Geral (TRG), o espaço-tempo não é imutável e pode apresentar curvatura, dependendo da presença de matéria, energia, pressões e tensões. Essa modificação na geometria do espaço-tempo fica codificada no tensor métrico g de uma forma estabelecida pela teoria. Um pulso de luz ou um ponto material em movimento livre da ação de forças (a força eletromagnética, por exemplo) seguiria o percurso “mais reto possível” nessa geometria, denominado geodésica, que consiste em uma solução da célebre equação da geodésica na qual se observa a presença das componentes g_{ij} do

Figura 1 – Equação da Geodésica.

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0$$

Fonte: Os autores

tensor métrico, bem como de suas derivadas, ilustrando como as características da geometria estão associadas ao tipo de movimento do corpo (Ferraro, 2007). Essa equação pode ser usada para descrever o movimento orbital de um planeta desde que a gravidade do Sol esteja codificada no tensor métrico, bem como as particularidades do sistema de coordenadas usado, que normalmente não pode ser cartesiano, senão como uma aproximação na vizinhança de um ponto, expediente muito usado em muitas referências históricas de Einstein citadas, como:

Deixe-me ver se posso resumir a teoria da geometria da gravidade de Einstein em três idéias: (1) localmente, geodésicas parecem retas; (2) ao longo de regiões mais extensas de espaço e tempo, geodésicas originalmente distantes umas das outras começam a se aproximar a uma taxa regida pela curvatura do espaço e do tempo, e esse efeito da geometria sobre a matéria é o que queremos dizer hoje com essa velha palavra "gravitação"; (3) a matéria, por sua vez, deforma a geometria (Misner; Thorne; Wheeler, 1973).

O desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG) seguiu uma intrincada sequência histórica que iniciou em 1907 com a concepção do Princípio da Equivalência (Pais, 2005; Janssen; Renn, 2015) e terminou em novembro de 1915, quando Einstein apresentou na Academia Prussiana de Ciências em Berlim, neste mês, uma série de 4 palestras que terminou em 25 de novembro de 1915. Esses foram considerados por Abraham Pais (2005), os “passos finais” para que a teoria assumisse sua forma conhecida (Einstein, 1915), embora não se deve considerar que a teoria cessou de ser debatida, aplicada e aperfeiçoada, pois estabeleceu-se uma grande área de pesquisa que encontra-se em atividade até hoje.

Na terceira apresentação para a academia Prussiana no mês de novembro de 1915, intitulada “Explicação do Movimento do Periélio de Mercúrio a partir da Teoria da Relatividade Geral” (Vankov, 2010), Einstein explicou quantitativamente a anomalia na órbita de Mercúrio, um problema de dinâmica orbital que estava em aberto há setenta anos, desde que Le Verrier conseguiu, pela primeira vez, mostrar sua existência. Poucas semanas depois, em 22 de dezembro de 1915, apesar de estar participando da Primeira Guerra Mundial fazendo uso de seus conhecimentos técnicos de cálculos de artilharia, Karl Schwarzschild comunica Einstein, por carta, que havia obtido uma solução exata, estática, isotrópica da equação de campo da TRG para uma massa puntiforme M (Schwarzschild, 1916), a qual consistia em uma expressão matemática do tensor métrico para o espaço-tempo de quatro dimensões (1 dimensão temporal e 3 dimensões espaciais) que atendia exatamente aos pressupostos adotados no artigo (Vankov, 2010) e fazia algumas críticas referentes às aproximações desenvolvidas por Einstein. Em 16 de janeiro de 1916, Einstein apresenta o resultado de Schwarzschild na Academia Prussiana de Ciências, pois este ainda estava na frente de batalha contra a Rússia. A solução aproximada de Einstein, aplicada ao avanço do periélio do planeta Mercúrio, estava de acordo com as observações astronômicas e com a solução exata de Schwarzschild (Pais, 2010). O resultado aproximado que Einstein obteve era um desvio de 43” por século no periélio da órbita de Mercúrio no sentido do seu movimento, ao passo que os dados astronômicos eram 45” ± 5” por século.

Em 16 de janeiro de 1915 Einstein apresenta na Academia Prussiana o segundo e último trabalho de Schwarzschild sobre a TRG. Nele é facilmente identificável que não

usadas as coordenadas que comumente são apresentadas nos livros didáticos a respeito desse trabalho e também aparece, pela primeira vez o raio de Schwarzschild, o qual ainda não é associado ao que se chama hoje Horizonte de Eventos (Schwarzschild, 1916). O presente trabalho não é propriamente um trabalho de história da ciência, porém, espera-se que seja possível aproveitar a investigação aqui proposta e entender melhor a forma com que Schwarzschild e Einstein compreenderam seus resultados em seu contexto.

Em 11 de maio Schwarzschild faleceu em decorrência de uma doença auto-imune e Einstein fala à Academia Prussiana novamente, prestando grande homenagem a ele. Pais, que conheceu Einstein pessoalmente, é da opinião que essa investigação da anomalia da órbita de Mercúrio, juntamente com os trabalhos de Schwarzschild deixaram-no extremamente feliz e considerando um dos melhores momentos de sua carreira (Pais, 2010).

CONSIDERAÇÕES FINAIS/CONCLUSÃO

O Presente trabalho ainda está em desenvolvimento e em dia com o cronograma apresentado no plano de Iniciação científica. Portanto, fora realizado até o presente momento os objetivos específicos até o item 2, qual estamos realizando as ultimas discussões e demonstrações acerca da Derivada Covariante e como ela se mostra em uma descrição intrínseca e abstrata. Após isso, realizou-se alguns exemplos usando coordenadas generalizadas já conhecidas determinando suas respectivas derivadas covariantes.

REFERÊNCIAS

Eigenchris, Chris. **Tensor Calculus 19: Covariant Derivative (Intrinsic) and Geodesics**. Youtube, 07/2019. <https://www.youtube.com/watch?v=EFKBp52LtDM>. Acesso em: 28 jul. 2025.

EINSTEIN, A. **Die Feldgleichungen der Gravitation, Preussische**. Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, Dec.2 ,1915. Uma tradução em inglês pode ser encontrada em: https://en.wikisource.org/wiki/Translation:The_Field_Equations_of_Gravitation, sob o título "The Field Equations of Gravitation." Acesso em: 21 nov. 2023.

EINSTEIN, A. **On The Principle of Relativity**. In: Collected Papers of Albert Einstein. The Berlin Years: Writings, 1914-1917 (English translation supplement). Disponível em: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/15>. Acesso em: 21 nov. 2023.

EINSTEIN, A. **Zur Elektrodynamik bewegter Körper**. Annalen der Physik, Bern, v. 322, n. 10, p. 891–921. Disponível em inglês e alemão em: <https://en.wikisource.org/wiki/Portal:Relativity>. Acesso em: 21 nov. 2023.

FERRARO, R. **Einstein's space-time: an introduction to special and general relativity**. Springer, June 7, 2007.

GALISON, Peter. **Einstein's Clocks and Poincare's Maps: Empires of Time**. New York, W.W. Norton, Sept. 17, 2004.

JANSSEN, M.; RENN, J. **Arch and scaffold**: How Einstein found his field equations. *Physics Today*, disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/PT.3.2979>, v. 68, n. 11, p. 30–36, Nov. 2015. Acesso em: 21 nov. 2023.

LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H. **Textos fundamentais da física moderna**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

MINKOWSKI, H. **Die grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten körpern**. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung, 1908. Disponível em: https://de.wikisource.org/wiki/Die_Grundgleichungen_f%C3%BCr_die_elektromagnetische_n_Vorg%C3%A4nge_in_bewegten_K%C3%B6rpern. Acesso em: 21 nov. 2023.

MISNER, Charles W.; THORNE, Kip S.; WHEELER, John A. **Gravitation**, Freeman, 1973.

PAIS, Abraham. **Sutil é o senhor**: a ciência e a vida de Albert Einstein. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1 jan. 2005.

SCHWARZSCHILD, Karl. **Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie**. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* 1, 1916.

SCHWARZSCHILD, Karl. **Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit**. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, vol. 1, p. 424. Uma tradução em inglês pode ser encontrada disponível em: <https://arxiv.org/abs/physics/9912033>. Acesso em: 21 nov. 2023

SILVA, Jonas J. D. P. **A estrutura erigida para a relatividade de Einstein**: o espaço-tempo de Minkowski. *Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada*, Ponta Grossa, v. 4, n. 2, p. 62-75, dez. 2017. Semestral. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbfta/article/view/7155>. Acesso em: 19 nov. 2023.

VANKOV, Anatoli A. **General Relativity Problem of Mercury's Perihelion Advance Revisited**. ArXiv, physics. Aug. 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1008.1811>. Acesso em: 21 nov. 2023.