

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O MAIOR EXPOENTE DE LYAPUNOV NO SISTEMA DE LORENZ¹

ALVES, Fabricio Fernando²
SOARES, Gustavo Morato de Marchi³.

RESUMO

Nesse trabalho é realizada uma comparação de 3 métodos numéricos utilizados para calcular o maior expoente de Lyapunov. Os métodos foram aplicados no sistema de Lorenz, com uma escolha de parâmetros de forma a gerar o comportamento caótico do sistema e implementados em *Python*, *MATLAB* e *Julia*. Comparou-se os valores obtidos ao já conhecidos da literatura. Por fim, é observado a variação maior do expoente de Lyapunov de acordo com a variação de um parâmetro do sistema, confrontando com a dinâmica conhecida do sistema, onde notou-se as mudanças no maior expoente de Lyapunov conforme o sistema passa por bifurcações.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas não lineares; Caos; Expoentes de Lyapunov; Sistema de Lorenz.

INTRODUÇÃO

O maior expoente de Lyapunov é um valor que caracteriza a sensibilidade de um sistema dinâmico a suas condições iniciais, mais especificamente, a razão na qual trajetórias infinitesimalmente próximas se separam.

De acordo com Silva (2014), considerando um sistema de dimensão n , com uma esfera de condições iniciais centrada num ponto $\vec{x}(t_0)$, o volume dessa esfera se deforma conforme o passar do tempo. Assumindo que na j -ésima dimensão o raio inicial tenha variado exponencialmente, tal que em um instante t tem-se:

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

O λ_j é chamado de j -ésimo expoente de Lyapunov do sistema. Ou seja, o j -ésimo expoente de Lyapunov pode ser descrito pela Equação (2).

$$\lambda_j = \frac{1}{t - t_0} \ln \left(\frac{d_j(t)}{d_j(t_0)} \right). \quad (2)$$

O número λ_m é chamada de maior expoente de Lyapunov. Segundo Silva (2014), para sistemas dinâmicos contínuos tridimensionais, $\lambda_m > 0$ indica o surgimento de um atrator estranho, ou seja, indica o comportamento caótico do sistema.

Para uma definição mais rigorosa dos expoentes de Lyapunov é necessário abordar o Teorema de Oseledec (ou Teorema Ergódico Multiplicativo), tal definição pode ser encontrada em Robinson (1998).

De forma geral, é difícil obter analiticamente os coeficientes de Lyapunov, sendo necessária a utilização de métodos numéricos. Visto isso, esse trabalho compara três métodos diferentes, descritos em Wolf et al. (1985), Benettin et al. (1980) e Kuptsov e Parlitz (2012) respectivamente, aplicados ao sistema de Lorenz, muito abordado na literatura e

¹ Artigo resultante de projeto de Iniciação Científica financiado pelo IFSP e PACTec.

² Doutor em Matemática; IFSP-PEP; Presidente Epitácio; SP; fabricio.alves@ifsp.edu.br.

³ Graduando em Engenharia Elétrica; IFSP-PEP; Presidente Epitácio; SP; gustavo.morato@aluno.ifsp.edu.br.

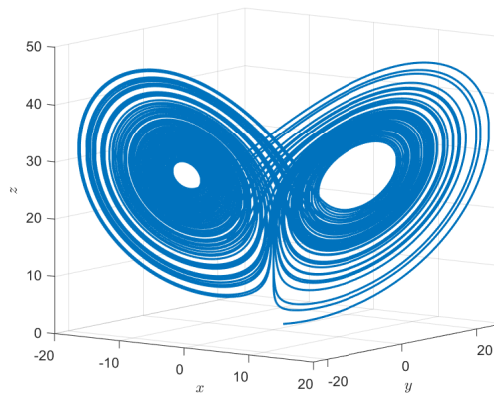
cujo os expoentes de Lyapunov já são conhecidos com precisão no trabalho de Viswanath (1998) (Capítulo 9.2).

O sistema de Lorenz, descrito pela Equação (3), surgiu como um modelo simplificado para descrever o fenômeno de convecção na atmosfera por Edward N. Lorenz (BOYCE; DIPRIMA, 2010), sendo um dos principais exemplos de sistema dinâmico contínuo capaz de apresentar comportamento caótico.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (3)$$

Nesse contexto, x está relacionado com a intensidade do movimento do fluido, y e z com as variações na temperatura na direção horizontal e vertical, respectivamente. Os parâmetros σ e β dependem do material e da geometria do fluido, enquanto ρ está associado com a diferença de temperatura na convecção. Para $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ e $\rho = 28$ observa-se a formação de um atrator estranho no retrato de fase do sistema, conforme a Figura 1.

Figura 1: Retrato de fase do Sistema de Lorenz para $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ e $\rho = 28$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

OBJETIVOS

Analisar diferentes métodos numéricos empregados para o cálculo do maior expoente de Lyapunov no sistema de Lorenz, comparando com o valor encontrado na literatura. Observar a dinâmica do sistema de Lorenz de acordo com o valor do maior expoente de Lyapunov.

METODOLOGIA

Para a realização desse trabalho, foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre principais métodos numéricos para calcular o expoente de Lyapunov, bem como conceitos de bifurcação do modelo proposto para a interpretação dos resultados obtidos, de forma que resultados apontados nessa pesquisa foram verificados combinando-se métodos qualitativos e numéricos. Os métodos numéricos utilizados são descritos brevemente a seguir.

Em Wolf et al. (1985) o algoritmo proposto para estimar o maior expoente de Lyapunov utiliza diretamente uma série temporal, ou seja, não é necessário conhecer as equações diferenciais do sistema. Isso é interessante para, por exemplo, sinais medidos experimentalmente. Ele se baseia na reconstrução do espaço de fases usando o Teorema de Takens (nomeado *Teorema principal* em Takens (1981)).

Em contrapartida o método descrito em Benettin et al. (1980) necessita do conhecimento das equações diferenciais do sistema, não sendo diretamente aplicado a séries temporais. Em Benettin et al. (1980) se acompanha a evolução de um conjunto de vetores ortonormais conforme a equação variacional, que, por fim, são ortonormalizados via *QR Decomposition*, podendo ser utilizado para estimar não somente o maior expoente de Lyapunov, como todo o espectro de expoentes.

O último algoritmo abordado é o de Kuptsov e Parlitz (2012), que calcula os vetores covariantes de Lyapunov, que além de informar as taxas médias de expansão/contração do espaço de fases, indicam as direções específicas associadas a cada expoente.

Abaixo, são comentados alguns resultados referentes ao sistema Lorenz, relevantes para a interpretação dos resultados obtidos nesse trabalho. Em particular, as definições formais para as bifurcações de forquilha e Hopf podem ser encontradas na seção 3.4 de Guckenheimer e Holmes (2013).

Conforme Hirsch, Smale e Devaney (2013), o sistema (3) possui 3 pontos de equilíbrio, a origem $(0, 0, 0)$,

$$Q_+ = (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1), \quad Q_- = (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1). \quad (4)$$

Os dois últimos pontos de equilíbrio só existem para $\rho > 1$, portanto é possível perceber que ocorre uma bifurcação em $\rho = 1$, mais precisamente, uma bifurcação de forquilha supercrítica, como detalhado no Capítulo 4.3.1 em Hateley (2019).

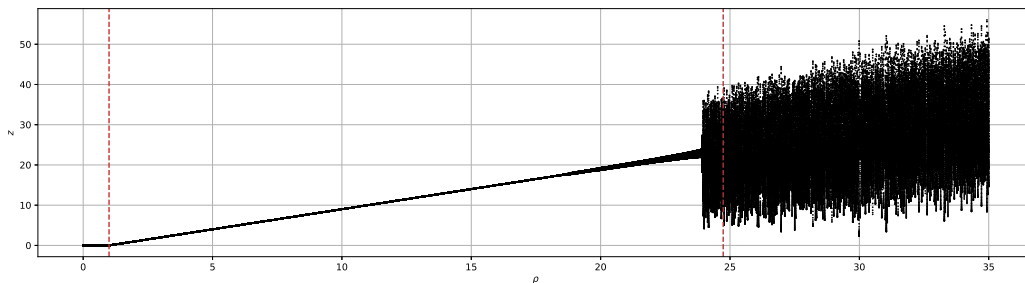
Outra bifurcação relevante no sistema de Lorenz é a Hopf subcrítica, para o valor $\rho = \rho^*$ tal que

$$\rho^* = \sigma \left(\frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1} \right), \quad (5)$$

cujas dedução desse valor pode ser encontrada no Capítulo 7.2 em Sparrow (2012).

As bifurcações discutidas são sintetizadas na Figura 2, que mostra o Diagrama de Bifurcação do sistema de Lorenz, com linhas vermelhas em destaque para $\rho = 1$ e $\rho = \rho^*$.

Figura 2: Digrama de bifurcação para o sistema (3), com $\sigma = 10$ e $\beta = \frac{8}{3}$.



Fonte: Elaborado pelos autores.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme descrito na Metodologia, foi aplicado o método de Kuptsov e Parlitz (2012) em *Python* utilizando *Jupyter Notebook*, o método de Wolf et al. (1985) no *software MATLAB* e o método de Benettin et al. (1980) implementado em *Julia* e *Python* para o sistema (3) considerando $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ e $\rho = 28$, pois, segundo Viswanath (1998), para esses parâmetros, $\lambda_m = 0,90566$. Com isso, foi montada a Tabela 1 que mostra a diferença obtida entre cada método e o valor encontrado em Viswanath (1998), bem como o tempo levado pelo algoritmo implementado para obter λ_m .

De acordo com a Tabela 1, o algoritmo de Wolf et al. (1985) teve a menor precisão observada e foi o 2º mais lento, o que é coerente devido a ser implementado em *MATLAB*. O método de Kuptsov e Parlitz (2012) teve o segundo maior erro e o maior tempo de processamento, devido, em muito, a sua implementação em *Python*. O algoritmo de Benettin et al. (1980) mostrou-se eficaz tanto em *Julia*, quanto *Python*, onde vale ressaltar que o tempo de processamento foi menor devido a integração com *C*.

Tabela 1: Comparação entre os métodos numéricos para cálculo de λ .

Implementação	Método numérico	Diferença em relação a Viswanath (1998)	Tempo de processamento (s)
<i>Python (Jupyter)</i>	Kuptsov e Parlitz (2012)	$5.51 \cdot 10^{-3}$	45,1
<i>Python</i>	Benettin et al. (1980)	$1,19 \cdot 10^{-4}$	10,7
<i>Julia</i>	Benettin et al. (1980)	$3,13 \cdot 10^{-4}$	5,9
<i>MATLAB</i>	Wolf et al. (1985)	$1.02 \cdot 10^{-2}$	40,1

Fonte: Elaborado pelos autores.

Utilizando o método de Benettin et al. (1980), que teve o melhor desempenho conforme a Tabela 1, foi calculado λ_m do sistema (3) para diferentes valores de ρ , conforme mostra a Figura 3.

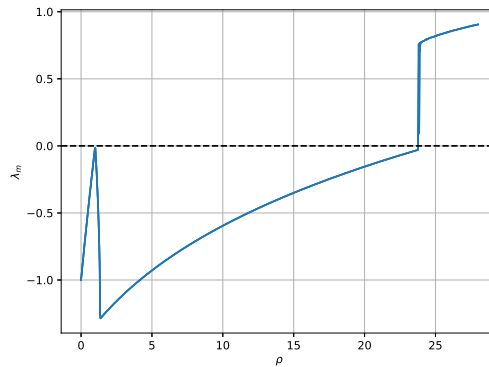
Como destacado na Figura 4a, os valores de λ_m aumentam de $\rho = 0$ até $\rho \approx 1$, porém não se tornam positivos, esse comportamento se relaciona com a bifurcação de forquilha que o sistema sofre em $\rho = 1$.

Outra região de interesse da curva $\lambda_m \times \rho$ é o momento em que λ_m cruza o zero, que acontece em $\rho \approx 23,7$ conforme ilustrado pela Figura 4b. Note que, de acordo com a Equação (5), o sistema sofre uma bifurcação de Hopf em

$$\rho^* = \sigma \left(\frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1} \right) = 10 \left(\frac{10 + \frac{8}{3} + 3}{10 - \frac{8}{3} - 1} \right) = \frac{470}{19} \approx 24,7368. \quad (6)$$

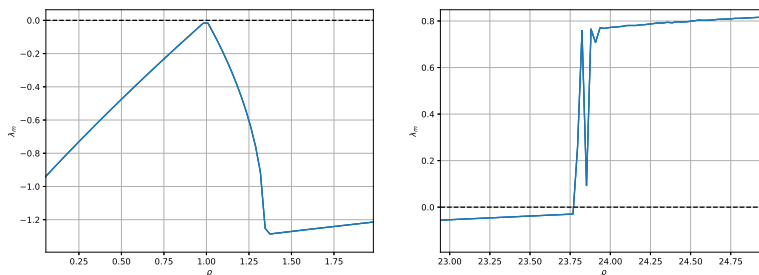
Dessa forma, pode-se entender a mudança brusca na Figura 4b como um efeito da bifurcação de Hopf, bem como a transição do sistema para o regime caótico.

Figura 3: λ_m para diferentes valores de ρ .



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 4: λ_m para diferentes valores de ρ .



(a) Pico inicial em $\rho = 1$.

(b) Transição para $\lambda_m > 0$.

Fonte: Elaborado pelos autores.

CONCLUSÃO

Foram comparados os métodos de Kuptsov e Parlitz (2012), Wolf et al. (1985) e Benettin et al. (1980) para determinar o maior expoente de Lyapunov no sistema de Lorenz com os parâmetros $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ e $\rho = 28$. Comparando com valor obtido de Viswanath (1998), os algoritmos implementados com base em Benettin et al. (1980) obtiveram os melhores resultados. Além disso, verificou-se uma relação entre o expoente de Lyapunov e as bifurcações de forquilha e Hopf através curva $\lambda_m \times \rho$, de forma a ilustrar como dinâmica do sistema influencia os valores do maior expoente de Lyapunov.

REFERÊNCIAS

BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, Springer, v. 15, n. 1, p. 9–20, 1980.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010. v. 10.

GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 42.

HATELEY, J. The lorenz system. *Lecture Notes*, 2019. Disponível em: <<https://web.math.ucsb.edu/~jhateley/paper/lorenz.pdf>>.

HIRSCH, M. W.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. [S.l.]: Academic press, 2013.

KUPTSOV, P. V.; PARLITZ, U. Theory and computation of covariant lyapunov vectors. *Journal of Nonlinear Science*, Springer Science and Business Media LLC, v. 22, n. 5, p. 727–762, mar. 2012. ISSN 1432-1467. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00332-012-9126-5>>.

ROBINSON, C. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. [S.l.]: CRC press, 1998.

SILVA, P. D. B. *Comportamento caótico em modelos matemáticos de câncer*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2014.

SPARROW, C. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 41.

TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence. In: RAND, D.; YOUNG, L.-S. (Ed.). *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981. p. 366–381. ISBN 978-3-540-38945-3.

VISWANATH, D. *Lyapunov exponents from random Fibonacci sequences to the Lorenz equations*. Tese (Doutorado) — Cornell University, 1998.

WOLF, A. et al. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278985900119>>.