

Classificação das Bifurcações em Sistemas Dinâmicos Unidimensionais¹

BELETATO, Guilherme Gonçalves²

MAGRINI, Luciano Aparecido³

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo estudar e apresentar as diferentes bifurcações que podem aparecer em sistemas dinâmicos contínuos em dimensão um e suas respectivas formas normais. Com o objetivo de estudar mudanças qualitativas nas soluções de equações diferenciais, foi realizada uma revisão bibliográfica clássica dos principais tipos de bifurcações: sela-nó, transcritical e *pitchfork*. Na modelagem matemática de fenômenos em diversas áreas do conhecimento, é frequente a utilização de parâmetros reais, porém mesmo pequenas variações nestes podem causar mudanças significativas no comportamento do fenômeno em estudo, como surgimento e desaparecimento de pontos de equilíbrio, mudanças de estabilidade que alteram o comportamento do fluxo dinâmico nas vizinhanças destes pontos de equilíbrio. Estas mudanças repentinas recebem o nome de bifurcações, e, para compreendê-las, foram estudadas suas características e especificidades com finalidade de categorizá-las e classificá-las.

Palavras-chave: bifurcações, sistemas dinâmicos, equações diferenciais ordinárias.

INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos são utilizados na modelagem matemática de fenômenos da Física, Química, Biologia, Engenharias, entre outras áreas do conhecimento. Em geral tratam da relação entre variáveis independentes, como por exemplo o tempo t , e a variação de uma ou mais grandezas dependentes, usualmente x, y, z , e outros. Tais sistemas são frequentemente descritas com uma ou mais equações diferenciais (neste caso consideramos apenas as ordinárias) em que se iguala a derivada de uma grandeza em função do tempo e uma função de classe C^2 dependente tanto das grandezas dependentes quanto independentes. Em linguagem matemática:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x)$$

Chama-se ponto de equilíbrio um elemento (t_E, x_E) do domínio, tal que $F(t_E, x_E) = 0$ e, de maneira informal, as soluções podem ser compreendidas como um conjunto de pontos (t, x) que formam trajetórias no espaço de fase chamado, geralmente, de fluxo. Em (Strogatz, 2018) é explicado que a dinâmica das soluções é simples: ou são atraídas para regiões ou seguem divergindo infinitamente pelo espaço de fases a depender da estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema. Entretanto, o

¹ Projeto de Iniciação Científica fomentado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo n°.2023/18380-6

² Graduando em Licenciatura em Matemática; Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo (IFSP); São Paulo; São Paulo; guilherme.beletato@aluno.ifsp.edu.br.

³ Doutor em Computação Aplicada; Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE); São José dos Campos; São Paulo; magrini@ifsp.edu.br

comportamento das soluções é influenciado pelos parâmetros reais utilizados ao definir a equação diferencial correspondente ao sistema dinâmico de interesse.

Para compreender como a variação de parâmetros altera o comportamento das soluções de um sistema dinâmico, investigou-se, durante a iniciação científica que deu origem a este trabalho, as condições que definem a estabilidade de um ponto de equilíbrio e na sequência estudou-se sobre as possibilidades de bifurcações em sistemas dinâmicos unidimensionais, caso em que há apenas uma variável dependente. Por fim, apresentam-se neste trabalho as chamadas formas normais das bifurcações utilizando diagramas visando uma introdução do leitor ao assunto.

OBJETIVOS

Apresentar as mudanças qualitativas significativas em sistemas dinâmicos dadas em função de alterações em parâmetros conhecidas como bifurcações através de exemplos gráficos das formas normais das bifurcações conhecidas na literatura como sela-nó, transcritical e *pitchfork* em sistemas em uma dimensão.

METODOLOGIA

O presente estudo foi realizado através de uma pesquisa bibliográfica, revisando aspectos elementares da teoria das equações diferenciais ordinárias e sistemas dinâmicos. Também fez-se a revisão da literatura a respeito da estabilidade de pontos de equilíbrio e formas normais de bifurcações que podem ocorrer em dimensão unitária. Estudos computacionais foram realizados através da integração numérica de equações diferenciais ordinárias buscando compreender o comportamento do fluxo em função dos parâmetros reais presentes no modelo. Para as integrações numéricas utilizou-se o método Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4).

DISCUSSÕES

Assim como já brevemente apresentado na introdução deste trabalho, o uso de parâmetros reais na modelagem de fenômenos naturais através de equações diferenciais e sistemas dinâmicos pode gerar influências no comportamento das soluções do sistema, sobretudo nas proximidades de pontos de equilíbrio (Strogatz, 2018). Antes de abordar as bifurcações provocadas por parâmetros, mostra-se conveniente apresentar alguns conceitos.

Sabe-se do cálculo diferencial e integral que uma família de funções pode compartilhar a mesma derivada; por exemplo $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^3 + 4$ compartilham a derivada $f'(x) = g'(x) = 3x^2$, logo existem infinitas soluções para uma única equação diferencial. Para que se obtenha uma solução única, considera-se uma condição inicial $x(0) = x_0$. Desta forma coloca-se um ponto específico ao qual a solução desejada deve pertencer, garantindo não só a existência como a unicidade da solução. Tanto exercícios envolvendo equações diferenciais quanto simulações computacionais de modelos são apresentados como problemas de valor inicial:

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = F(t, x) \quad x(0) = x_0 \right.$$

Em computação aplicada, assim como já comentado na introdução deste trabalho, a solução é uma sequência de pontos, sendo x_0 o primeiro deles, e constituem o que se denomina de fluxo do sistema dinâmico estudado.

O teorema de existência e unicidade de soluções (também chamado de teorema da contração de Picard) pode ser encontrado em (Sotomayor, 2011).

Um sistema dinâmico autônomo é o nome dado a sistemas cujas equações diferenciais não dependem explicitamente da variável independente. Ainda se têm a variável x como uma função $x(t)$, porém a equação diferencial não é definida utilizando t . Veja os exemplos:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + x + 3 \text{ é autônoma}$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t \text{ não é autônoma}$$

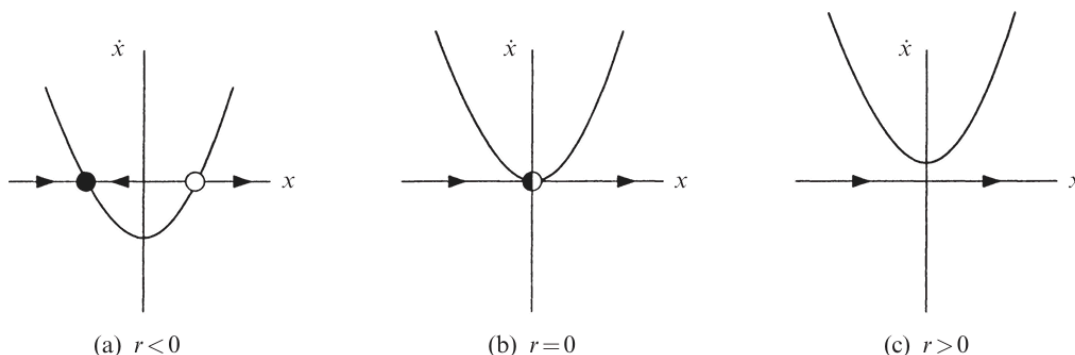
Logo, nem sempre há preocupação de apresentar a função que define a equação diferencial como $F(t, x)$, basta $F(x)$. Porém, considerando a importância que é dada aos parâmetros durante os estudos de bifurcações, também é possível escrever $F(x, r)$, sendo r uma constante real, como por exemplo $F(x, r) = x + r$, em que cada valor de r resulta em uma equação diferencial diferente.

Formas normais de bifurcações são equações “padrões”, pois são as equações autônomas mais simples a apresentar as características relacionadas às bifurcações.

Não é possível decidir sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio apenas com esta informação. Para (Strogatz, 2018), a estabilidade é melhor determinada caso a caso e utilizando métodos gráficos quando se trabalha com apenas uma dimensão. Traçar o gráfico da função em um plano xXx' se mostra uma boa ferramenta nestes casos e será utilizada na apresentação dos estudos a seguir.

A primeira bifurcação escolhida para estudo é a bifurcação sela-nó, cuja forma normal é $\frac{dx}{dt} = x^2 + r$. A existência de pontos de equilíbrio depende diretamente do valor atribuído ao parâmetro r , uma vez que $\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-r}$. Na imagem a seguir, três diferentes diagramas podem ser vistos, cada um apresentando a forma normal $x' = \frac{dx}{dt} = x^2 + r$ com diferentes valores de r . Caso $r < 0$, então tem-se dois pontos de equilíbrio, $x_1 = -\sqrt{-r}$ estável e $x_2 = \sqrt{-r}$ instável. Se $r = 0$, então há apenas $x_E = 0$ semi-estável. Já para $r > 0$, não existem pontos de equilíbrio. Desta forma fica evidente como alterações no parâmetro r definem o comportamento do sistema em relação à quantidade de pontos de equilíbrio, portanto r recebe o nome de parâmetro de bifurcação.

Figura 1 – Diagramas da forma normal da bifurcação sela-nó



Fonte: (Strogatz, 2018)

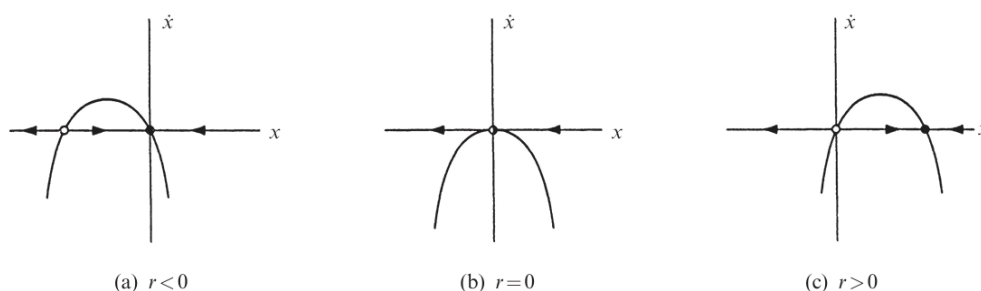
A estabilidade dos pontos de equilíbrio se torna mais perceptível neste tipo de diagrama. Ao recordar da definição de derivada como variação é possível compreender o comportamento da solução para cada valor de x . Suponha que para um certo instante de tempo t_n seja observado um valor x_n , que por sua vez é relacionado com um valor de x'_n positivo, então tem-se que o valor x_{n+1} observado num instante de tempo t_{n+1} seguinte será maior $x_{n+1} > x_n$ (ocorre um deslocamento para a direita). Alternativamente, caso haja

x_n com x_n' negativo, então ocorrerá o contrário: $x_{n+1} < x_n$ (ocorre um deslocamento para a esquerda). No caso em que $r = 0$ ocorre algo especial, $x = 0$ é o único ponto de equilíbrio, porém causa atração à esquerda ($x < 0 \Rightarrow x' > 0$), porém repele à direita ($x > 0 \Rightarrow x' > 0$). Por ser um valor em que ocorrem mudanças significativas no sistema, $r = 0$ recebe o nome de ponto de bifurcação.

Com a variação do parâmetro r é possível causar a “colisão” de dois pontos de equilíbrio de estabilidades opostas, que se aniquilam e fazem com que o sistema passe a possuir um ponto de equilíbrio semi-estável, que desaparece na sequência.

A bifurcação estudada na sequência foi a bifurcação transcritical, cuja forma normal é: $rx - x^2$. Quanto aos pontos de equilíbrio do sistema, sempre haverá $x_E = 0$ como ponto de equilíbrio, e caso $r \neq 0$, então haverá o ponto de equilíbrio $x = r$ também. Novamente tem-se $r = 0$ como ponto de bifurcação.

Figura 2 – Diagramas da forma normal da bifurcação transcritical



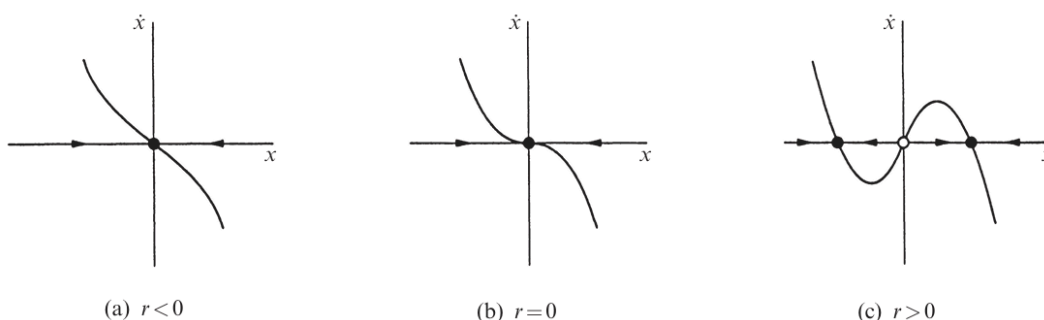
Fonte: (Strogatz, 2018)

Observando a estabilidade do ponto de equilíbrio $x_E = 0$, é possível perceber que é estável quando $r < 0$, passa a ser semi-estável quando $r = 0$, e termina instável quando $r > 0$. Já o outro ponto de equilíbrio possui estabilidade contrária à de x_E , e “se torna um só” com x_E quando $r = 0$.

Com a variação do parâmetro r , pontos de equilíbrio de estabilidades opostas se aproximam, colidem e se afastam, passando a ter estabilidades opostas após interagirem.

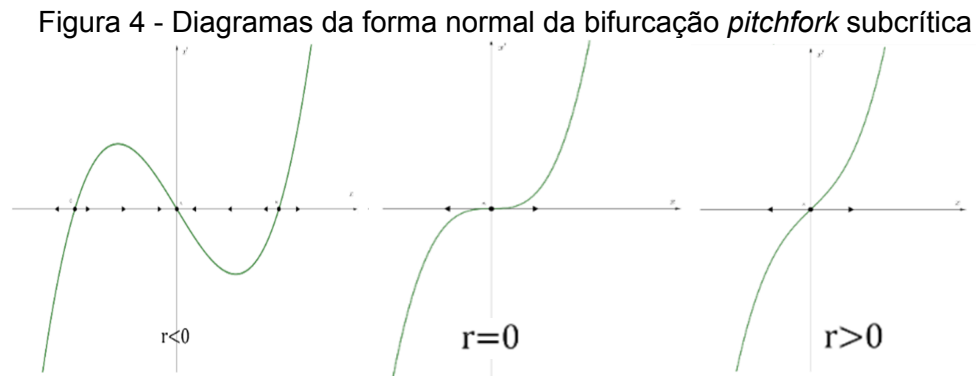
Por fim, a última bifurcação a ser incluída neste trabalho é a bifurcação *pitchfork*. Possui uma característica especial por ser dividida em dois casos, o primeiro possui a forma normal: $x' = rx - x^3$, configurando uma bifurcação *pitchfork* supercrítica. Enquanto o outro possui a forma normal $x' = rx + x^3$ e recebe o nome de bifurcação *pitchfork* subcrítica.

Figura 3 – Diagramas da forma normal da bifurcação *pitchfork* supercrítica



Fonte: (Strogatz, 2018)

Na bifurcação *pitchfork* supercrítica, o ponto de equilíbrio $x_E = 0$ existe independente do valor do parâmetro r . Porém, conforme r se torna positivo, o ponto x_E perde a sua estabilidade para dar origem a outros dois pontos de equilíbrio estáveis: $x_1 = \sqrt{r}$ e $x_2 = -\sqrt{r}$. O valor considerado ponto de bifurcação neste caso é $r = 0$.



Fonte: Autores

Já na bifurcação *pitchfork* subcrítica, o ponto de equilíbrio $x_E = 0$ também existe independente do valor de parâmetro r . Porém, conforme r se torna positivo, o ponto de equilíbrio x_E perde a sua estabilidade ao colidir com dois outros pontos de equilíbrio instáveis $x_1 = \sqrt{-r}$ e $x_2 = -\sqrt{-r}$, que desaparecem no processo. Novamente considera-se $r = 0$ o ponto de bifurcação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS/CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos o conceito de bifurcação em sistemas dinâmicos contínuos descritos por equações diferenciais ordinárias em dimensão um e descrevemos as diferentes bifurcações que podem se manifestar nestes sistemas considerando as mudanças geométricas no espaço de fases provocadas pela mudança de estabilidade dos pontos de equilíbrio existentes. Além das mudanças de estabilidade também viu-se que as bifurcações podem surgir do surgimento ou do desaparecimento dos pontos de equilíbrio.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP pelo financiamento da iniciação científica que deu origem a este trabalho, processo n.º.2023/18380-6.

REFERÊNCIAS

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. 2. ed. Boca Raton: Westview Press, 2018.
SOTOMAYOR, J. **Equações Diferenciais Ordinárias**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011.